

<i>Corrigé du concours national commun 2009</i>	<i>Filière : MP</i>
188 Massira 1A Marrakech Tel 024 34 30 09 Mprepa@menara.ma	Physique I

**PROBLÈME I : OPTIQUE**

**1<sup>ère</sup> Partie : Etude et propriétés des télescopes**

**1.1.– Question de cours**

**1.1.1.–**

- Approximation de l'optique géométrique est valable lorsque les dimensions  $d$  des ouvertures considérées sont très grandes devant la longueur d'onde  $\lambda$  ( $d \gg \lambda$ ).  
On néglige le phénomène de diffraction.

**1.1.2.–**

- Un système optique centré est un système qui possède une symétrie de révolution autour d'un axe optique (symétrie cylindrique)

**1.1.3.–**

- Approximation de GAUSS : les rayons lumineux sont peu inclinés et peu écartés par rapport à l'axe optique principal (rayons paraxiaux).
- Propriétés : le système optique dans les condition de GAUSS est stigmatique et aplanétique (approché).

**1.2.– Etude d'un miroir sphérique**

**1.2.1.–**

- Foyer objet  $F$  : c'est le point sur l'axe optique dont l'image par le miroir est à l'infini.

- Position du foyer objet : d'après la relation de conjugaison ( $A \equiv F$ ,  $A' \rightarrow \infty$ ) on a  $\overline{SF} = \frac{\overline{SC}}{2}$

- Foyer image  $F'$  : c'est l'image, par le miroir, d'un point qui est sur l'axe optique à l'infini.

- Position du foyer image : d'après la relation de conjugaison ( $A \rightarrow \infty$ ,  $A' \equiv F'$ ) on a  $\overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$

- La distance focale  $f$  est :  $f = -\frac{R}{2}$

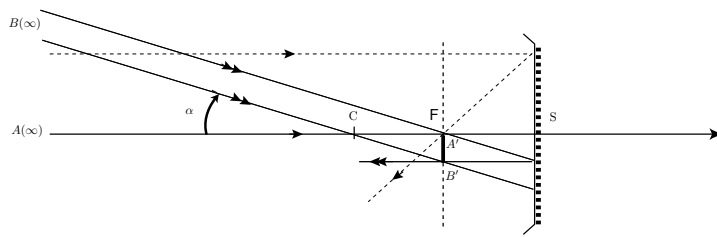
**1.2.2.–**

- **1.2.2.1.–** Construction géométrique de l'image  $A'B'$  :

**1.2.2.2.–**

- Position de  $A'$  :  $A \rightarrow \infty$  sur l'axe, donc  $A' \equiv F'$  soit :  $\overline{SA'} = -\frac{R}{2}$

Position de  $B'$  :  $B \rightarrow \infty$  hors axe, donc  $B'$  se trouve dans le plan focal image (en dessous de  $A'$  si  $B$  est au dessus de l'axe ( $\alpha < 0$ )).



- Dans les conditions de GAUSS ( $\alpha$  faible) on a (schéma 1.2.2.1) :  $\overline{A'B'} = \frac{R}{2} \alpha$

- L'image est réelle (renversée).

1.2.2.3.-  $\overline{A'B'}$  est proportionnelle à R, donc il faut choisir le rayon R grand pour avoir une grande image.

1.2.2.4.- Application numérique :  $\alpha = 2'' = 2 \times 4,89.10^{-6} \text{ rad}$  ,  $R = 28,76 \text{ m} \Rightarrow \overline{A'B'} = 140 \mu\text{m}$

**Remarque** : Dans l'énoncé 1.2.2, B est au dessus de l'axe optique, donc  $\alpha$  doit être négatif!!

1.2.3.-

- Pour voir les deux points images A' et B' sur la CCD il faut que  $|\overline{A'B'}| \geq \sqrt{2}h \Rightarrow \alpha \geq \frac{2\sqrt{2}h}{R} = \alpha_{\min}$

• Application numérique :  $\alpha_{\min} = \sqrt{2} \times 0,128'' = \sqrt{2} \times 6,25.10^{-7} \text{ rad}$  .

### 1.3.- Etude du télescope Cassegrain

1.3.1.-

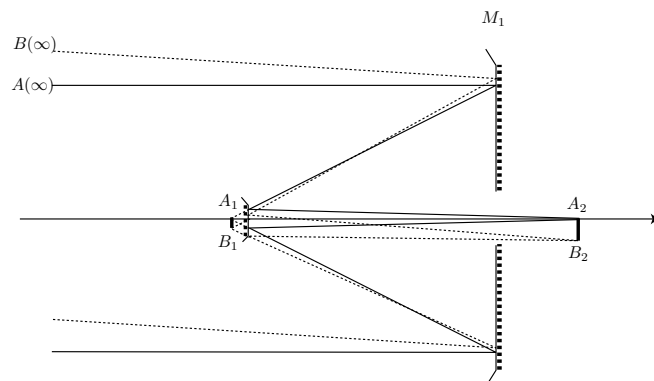
- $A \rightarrow \infty$  donc :  $A_1 \equiv F_1$  (foyer image du miroir  $M_1$ )
  - $A_2$  est le foyer du télescope.
  - $A_2$  est l'image de  $F_1$  par le miroir  $M_2$  donc :  $\frac{1}{S_2A_2} + \frac{1}{S_2F_1} = \frac{2}{S_2C_2}$
- or :  $\overline{S_2C_2} = -R_2$  et  $\overline{S_2F_1} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_1} = d - \frac{R_1}{2}$

soit :

$$\overline{S_2A_2} = \frac{R_2}{2} \frac{R_1 - 2d}{R_2 - R_1 + 2d}$$

• Application numérique :  $\overline{S_2A_2} = 15,05 \text{ m}$

1.3.2.- Construction géométrique :



1.3.3.–

• D'après 1.2.2.2.  $\Rightarrow \boxed{\overline{A_1 B_1} = \frac{R_1}{2} \alpha}$

• puisque  $\gamma = \frac{\overline{A_2 B_2}}{\overline{A_1 B_1}} \Rightarrow \boxed{\overline{A_2 B_2} = \gamma \frac{R_1}{2} \alpha}$

1.3.4.–

• La focale du télescope est :  $f = \frac{\overline{A_2 B_2}}{\alpha} \Rightarrow \boxed{f = \gamma \frac{R_1}{2}}$

1.3.5.–

• D'après 1.3.1. on a :  $F' \equiv A_2$ , d'où  $\overline{S_1 F'} = \overline{S_1 A_2} = \overline{S_1 S_2} + \overline{S_2 A_2} \Rightarrow \boxed{\overline{S_1 F'} = -d + \overline{S_2 A_2}}$

• Application numérique :  $\boxed{\overline{S_1 F'} = 2,65 \text{ m}}$

• Le grandissement de  $M_2$  est :  $\gamma = -\frac{\overline{S_2 A_2}}{\overline{S_2 F_1}}$  car  $A_2$  est l'image de  $F_1$  par le miroir  $M_2$ .

Avec :  $\overline{S_2 A_2} = 15,05 \text{ m}$  et  $\overline{S_2 F_1} = \overline{S_2 S_1} + \overline{S_1 F_1} = d - \frac{R_1}{2} = -1,98 \text{ m}$

d'où :  $\boxed{\gamma = 7,6}$

• La focale du télescope est :  $\boxed{f = 109,3 \text{ m}}$

•  $\boxed{\overline{A_2 B_2} = 1,06 \text{ mm}}$

• Conclusion : avec le télescope, l'image finale est plus grande qu'avec un seul miroir (7,6 fois plus grande).

1.3.6.–

• Pour avoir les deux images  $A_2$  et  $B_2$  sur la matrice CCD il faut que :  $|\overline{A_2 B_2}| \geq \sqrt{2}h$ , d'où :  $\boxed{\alpha \geq \frac{2\sqrt{2}h}{\gamma R_1} = \alpha'_{\min}}$

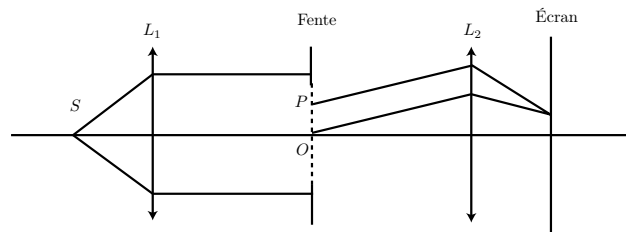
AN :  $\boxed{\alpha'_{\min} = \sqrt{2} \times 8,23 \cdot 10^{-8} \text{ rad} = \sqrt{2} \times 0,017''}$

•  $\boxed{\alpha'_{\min} < \alpha_{\min}}$

• Avec le télescope, on obtient une résolution plus grande.

**2<sup>ème</sup> Partie : Diffraction par une fente**

2.1.– Montage de diffraction à l'infini (montage à 2 lentilles) :



2.2.– Principe de HUYGENS-FRESNEL :

- Les surfaces élémentaires  $d\Sigma$  d'une surface d'onde (d'une source primaire S) se comportent comme des sources secondaires d'amplitude proportionnelle à  $d\Sigma$  et à  $\underline{s}_{\text{source}}$
- Les sources secondaires sont cohérentes.

2.3.– La diffraction à l'infini (de Fraunhofer) est obtenue lorsque :

- la source est à l'infini (rejetée à l'infini par la lentille  $L_1$ )
- l'observation se fait à l'infini ( $L_2$  ramène la figure de diffraction de l'infini à son plan focal image).

**Remarque** : La diffraction de Fraunhofer est obtenue aussi dans un plan conjugué de la source en utilisant une seule lentille.

2.4.–

• La signification de "grande dimension" suivant  $OY$  est :  $b \gg \lambda$

• Conséquence : on peut négliger la diffraction suivant la direction  $OY$ .

2.5.–

2.5.1.– La différence de marche est :

$\delta(M) = (SPM) - (SOM) = -nX \sin(\alpha) + nX \sin(\theta)$  (car  $\alpha$  est algébrique, il est négatif sur le schéma). Puisque on est dans les conditions de GAUSS ( $\alpha$  et  $\theta$  sont faibles) alors :  $\delta(M) = n(\theta - \alpha)X$ , soit :

$$\delta(M) = n \left( \frac{x}{f} - \alpha \right) X$$

2.5.2.– Calcul de l'amplitude  $\underline{A}(M)$  :

$$\begin{aligned} \underline{A}(M) &= \underline{K} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda_0} n \left( \frac{x}{f} - \alpha \right) X \right] dX \\ &= \underline{K} \frac{\left[ e^{\left[ -j \frac{2\pi}{\lambda_0} n \left( \frac{x}{f} - \alpha \right) X \right] \frac{a}{2}} \right]_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}}}{\left[ -j \frac{2\pi}{\lambda_0} n \left( \frac{x}{f} - \alpha \right) \right]} \end{aligned}$$

d'où :

$$\underline{A}(M) = \underline{K} a \sin xc \left[ \frac{\pi a}{\lambda_0} n \left( \frac{x}{f} - \alpha \right) \right]$$

2.6.– L'intensité lumineuse  $I(M)$  :

• On a :  $I(M) = k \underline{A}(M) \underline{A}^*(M)$ , d'où :

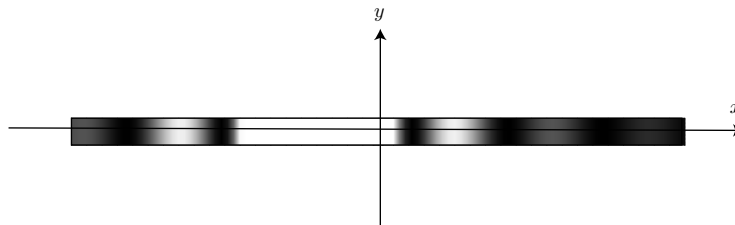
$$I(M) = I(x) = I_0 \left[ \sin c \left( \frac{\pi a}{\lambda_0} n \left( \frac{x}{f} - \alpha \right) \right) \right]^2$$

• Avec  $I_0 = k a^2 |\underline{K}|^2$

**Remarque** : il y a une erreur dans l'énoncé : il y a '- $\alpha$ ' au lieu de '+ $\alpha$ ' dans l'argument de  $\sin c$  car  $\alpha$  est choisi algébrique !

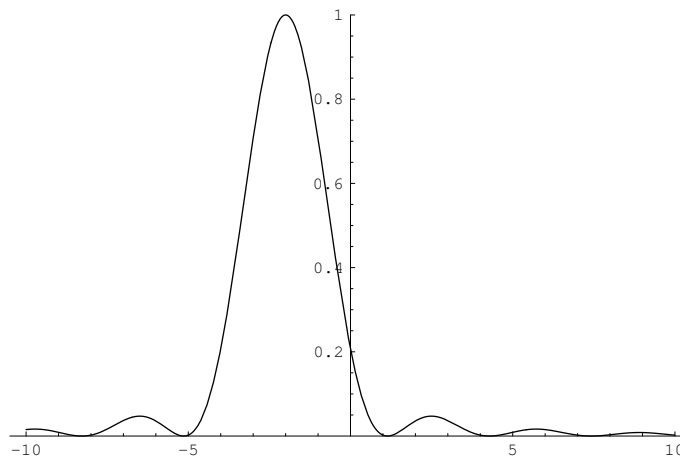
2.7.–

• Figure de diffraction ( $\alpha < 0$ ) :



• Caractéristiques :

- La 'frange' centrale est deux fois plus large que les autres.
- Sa largeur est proportionnelle à  $1/a$
- allongée selon  $Ox$



2.8.–

• Allure de la courbe  $I(x)$  ( $\alpha < 0$ ) :

• Caractéristiques :

- La 'frange' centrale est deux fois plus large que les autres.
- L'intensité du maxima secondaire est  $0,041 I_0$
- Centrée sur  $x_0 = \alpha f$

• L'intensité est maximale autour de l'image géométrique de la source :  $x_{\max} = \alpha f$

• Conclusion : L'image un point source n'est pas un point mais une tache de diffraction plus large, ce qui limite la résolution du télescope.

### 3<sup>ème</sup> Partie : Phénomènes limitant le pouvoir de résolution

3.1.– La figure de diffraction à la même symétrie que l'objet diffractant (symétrie circulaire) donc elle est formé d'une tache circulaire entourée d'anneaux.

3.2.–

3.2.1.– La distance entre les deux maxima est  $f\alpha$ . D'après le critère de Rayleigh, les deux taches de diffraction sont séparées si  $f\alpha \geq R_0$ , soit :

$$D_1 \geq 1,22 \frac{\lambda_0}{n\alpha}$$

3.2.2.– La résolution angulaire :

D'après 3.2.1., on déduit :

$$\alpha \geq 1,22 \frac{\lambda_0}{nD_1} = \alpha'_{\min}$$

3.3.– Phénomènes limitant le pouvoir de résolution :

- la turbulence atmosphérique qui déforme le front d'onde des ondes lumineuses.
- la diffraction par la pupille d'entrée du télescope.
- les aberrations (géométriques et chromatiques)

La résolution des télescopes est limitée essentiellement par la turbulence atmosphérique.

3.4.– Méthodes de correction :

- l'optique adaptative permet de corriger les effets de la turbulence atmosphérique
- l'apodisation permet d'atténuer les maxima secondaires de la tache de diffraction.

3.5.– L'utilisation des télescopes de grands diamètres permet de collecter plus de lumière afin de voir les objets célestes les moins brillants (qui sont assez loins).

4.1.- Dimension de  $C$  :  $[C] = L^3 M^{-1} \equiv \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

4.2.- L'équation d'un gaz parfait est  $\rho = \frac{MP}{RT}$ , d'où :

$$n = 1 + C \frac{M}{R} \frac{P}{T}$$

4.3.- Application numérique :  $C = 2,44 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$

4.4.- Expression de  $\delta n$  :

On a :  $n = 1 + C \frac{M}{R} \frac{P}{T}$ , d'où :

$$\begin{aligned} dn &= C \frac{M}{R} \left( \frac{dP}{T} + P d\left(\frac{1}{T}\right) \right) \\ &= C \frac{M}{R} \left( \frac{dP}{T} - P \frac{dT}{T^2} \right) \end{aligned}$$

soit :

$$\delta n = C \frac{M}{R} \left( \frac{\delta P}{T} - P \frac{\delta T}{T^2} \right)$$

4.5.- La surface d'onde = une surface où la phase  $\varphi$  d'une onde a la même valeur à un instant donné ( $\varphi = cte$ ).

4.6.- Théorème de MALUS : Les rayons lumineux sont perpendiculaire aux surfaces d'ondes.

4.7.-

4.7.1.- Calcul de la phase  $\varphi(x, z)$  (l'origine :  $\varphi(x, 0) = 0$ ) :

• si  $0 < z < e$  :

- si  $|x| > \frac{r_0}{2} \Rightarrow \varphi(x, z) = \frac{2\pi n}{\lambda_0} z$

- si  $|x| < \frac{r_0}{2} \Rightarrow \varphi(x, z) = \frac{2\pi(n + \delta n)}{\lambda_0} z$

• si  $z > e$  :

- si  $|x| < \frac{r_0}{2} \Rightarrow \varphi(x, z) = \frac{2\pi(zn + e\delta n)}{\lambda_0}$

4.7.2.- Equation de la surface d'onde est  $\varphi = \varphi_0 = cte \Rightarrow z = cte$  :

• si  $0 < z < e$  :

- si  $|x| > \frac{r_0}{2} \Rightarrow z = \frac{\lambda_0}{2\pi n} \varphi_0$

- si  $|x| < \frac{r_0}{2} \Rightarrow z = \frac{\lambda_0}{2\pi(n + \delta n)} \varphi_0$

• si  $z > e$  :

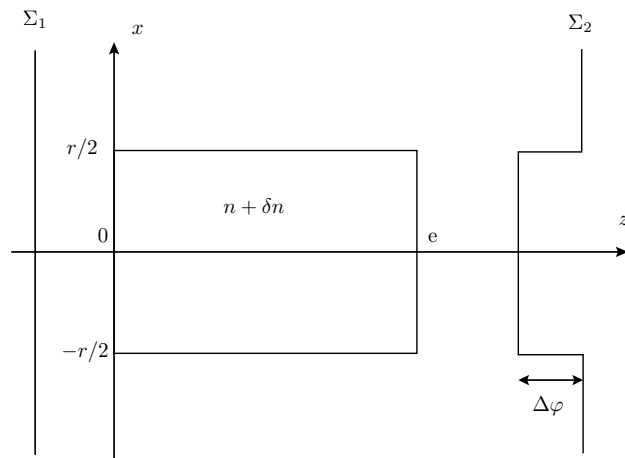
- si  $|x| < \frac{r_0}{2} \Rightarrow z = \frac{\lambda_0}{2\pi n} \varphi_0 - e \frac{\delta n}{n}$

dans chaque région la surface d'onde est un plan.

4.7.3.- Tracé des surfaces d'ondes :

-  $\Sigma_1$  une surface d'onde dans la zone  $z < 0$ .

-  $\Sigma_2$  une surface d'onde dans la zone  $z > e$  ( $\Delta\varphi = \frac{2\pi e}{\lambda_0} \delta n$ )



#### 4.7.3.-

- Conclusion : une variation de la température  $T$  et de la pression  $P$  entraîne une variation  $\delta n$  de l'indice de réfraction  $n$  de l'atmosphère et par conséquent, une déformation des surfaces d'onde.
- Pour corriger les effets de la turbulence atmosphérique sur les d'ondes, on utilise des miroirs déformables au rythme de la déformation du front d'onde (c'est l'optique adaptative).

## PROBLÈME II : ELECTRONIQUE

### 1<sup>ère</sup> Partie : Etude théorique

1.1.- L'AO est en régime linéaire car la patte (-) est reliée à la sortie (réaction négative).

1.2.-

- Aux basse fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ) les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs ouverts, donc :

$$v_s \rightarrow v_B = 0 \text{ car } i^- = 0.$$

- Aux hautes fréquences ( $\omega \rightarrow +\infty$ ) les condensateurs sont équivalents à des interrupteurs fermés, donc :

$$v_s \rightarrow v_A = v_B = 0$$

- Conclusion : c'est un filtre passe-bande.

1.3.-

- MILLMAN en A :

$$v_A = \frac{\frac{v_e}{R_1} + jC\omega v_B + jC\omega v_s + \frac{0}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + 2jC\omega + \frac{1}{R_2}}$$

- puisque  $v_B = 0$ , alors :

$$v_A = \frac{\frac{v_e}{R_1} + jC\omega v_s}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC\omega}$$

- MILLMAN en B :

$$v_B = \frac{jC\omega v_A + \frac{v_s}{R_3}}{jC\omega + \frac{1}{R_3}}$$

- puisque  $v_B = 0$ , il vient :

$$\underline{v}_s = -j C \omega R_3 \underline{v}_A$$

1.4.- Expression de  $\underline{H}$  :

- En combinant les relations de 1.3., il vient :

$$-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + 2jC\omega\right) \frac{\underline{v}_s}{jC\omega R_3} = \frac{\underline{v}_e}{R_1} + jC\omega \underline{v}_s$$

d'où :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1}{R_1} \frac{1}{\left(\underbrace{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}_{=\frac{1}{R_3}} + 2jC\omega\right) \frac{-1}{jC\omega R_3} - jC\omega}$$

d'où :

$$\underline{H} = \frac{-\frac{R_3}{2R_1}}{1 - j\frac{1}{2R_3 C\omega} + j\frac{R_3 C\omega}{2}} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

- avec :

$$- H_0 = -\frac{R_3}{2R_1}$$

$$- Q = \sqrt{\frac{R_3}{4R_3'}}$$

$$- \omega_0 = \frac{1}{C\sqrt{R_3 R_3'}}$$

1.5.-

- Aux hautes fréquences ( $x \gg 1$ ) :  $\underline{H} \approx \frac{H_0}{jQx} = \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{1}{j\omega}$  : le montage à un caractère intégrateur.
- Aux basses fréquences ( $x \ll 1$ ) :  $\underline{H} \approx \frac{H_0}{-jQ/x} = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega$  : le montage à un caractère dérivateur.

- Aux hautes fréquences ( $\underline{H} = \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{1}{j\omega}$ )  $\Rightarrow \underline{v}_s = \frac{H_0\omega_0}{Q} \frac{\underline{v}_e}{j\omega} \Rightarrow v_s(t) = \frac{H_0\omega_0}{Q} \int v_e(t) dt + cte$

- Aux basses fréquences ( $\underline{H} = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega$ )  $\Rightarrow \underline{v}_s = \frac{H_0}{Q\omega_0} j\omega \underline{v}_e \Rightarrow v_s(t) = \frac{H_0}{Q\omega_0} \frac{dv_e(t)}{dt}$

1.6.-

- Définition de la pulsation de coupure  $\omega_c$  à  $-3$  dB :  $|\underline{H}(\omega_c)| = \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$

- Calcul des  $\omega_c$  : on a  $|\underline{H}_{\max}| = |H_0|$  d'où :

$$- \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \right)$$

$$- \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2} \left( -\frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \right)$$

- La largeur de la bande passante :  $\Delta\omega = \omega_{c1} - \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{Q}$

1.7.-

- Application numérique :  $\Delta f = 150$  Hz

1.8.-

1.8.1.-



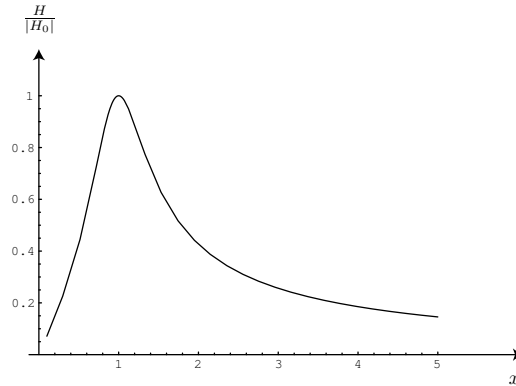
- Le module de  $\underline{H}$  est : 
$$H(\omega) = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

- L'argument de  $\underline{H}$  est : 
$$\varphi(\omega) = \pi - \text{Arctan} \left[ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]$$

1.8.2.-

$H(\omega)$  est maximale si son dénominateur est minimal donc pour :  $\omega = \omega'_0 = \omega_0$

- Allure de  $H(\omega)$  :



## 2<sup>ème</sup> Partie : Analyse de FOURIER

2.1.-

- $f \in \text{BP} = \left[ \frac{\omega_{c2}}{2\pi}, \frac{\omega_{c1}}{2\pi} \right] \Rightarrow v_s = v_c H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = E e^{j(\omega t - \pi/2)} H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$ , d'où :

$$v_s = \text{Re}(v_s) = \frac{E|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \sin[2\pi f t + \varphi(\omega)]$$

et puisque  $f = f_0$  :

$$v_s = E|H_0| \sin[2\pi f t + \pi] = -E|H_0| \sin(2\pi f t)$$

2.2.- Pas de question !!

2.3.-

- Le signal possède une composante continue  $E/2$
- La partie variable est impaire donc en *sinus*

2.4.- Allure du spectre en fréquence :

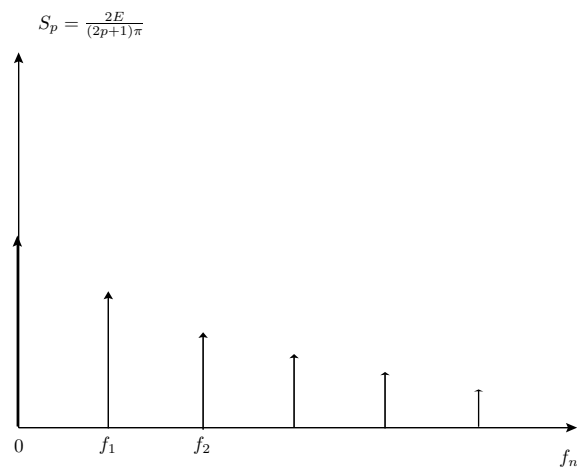
2.5.-

- $f_0 = f \in \text{BP}$  c'est la seule fréquence qui passe ( $p = 0$ ), donc :

$$v_s(t) = \frac{2E|H_0|}{\pi} \sin[2\pi f t + \varphi(f)] = -\frac{2E|H_0|}{\pi} \sin(2\pi f t)$$

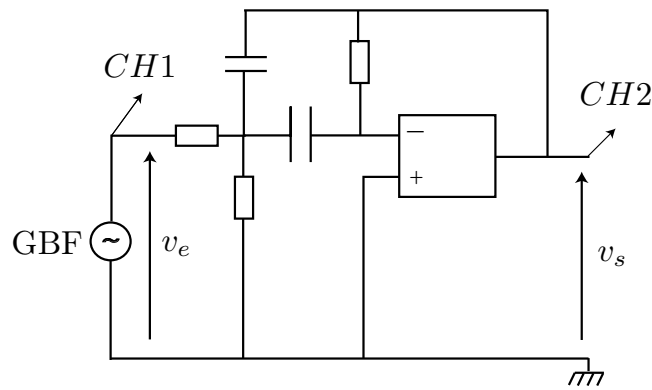
2.6.-

Pour balayer le domaine de fréquence on peut faire varier  $R_3$  ou  $C$  ce qui permet de déterminer les fréquences et les amplitudes des harmoniques, donc le spectre.



**3<sup>ème</sup> Partie : Etude pratique**

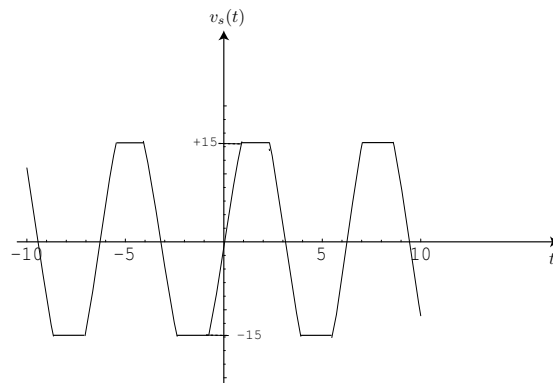
**3.1.**– Montage expérimentale :



**3.2.**– Etude du filtre :

- On utilise un signal sinusoïdal dont on fait changer la fréquence.
- on mesure l'amplitude de  $v_s$  et de  $v_e$  et on déduit le module  $H = \frac{V_s}{V_e}$ .
- On mesure aussi le déphasage  $\varphi = \varphi_s - \varphi_e$

**3.3.**– Si l'amplitude  $V_s$  de  $v_s$  dépasse  $V_{sat} = 15V$ , l'AO se sature.



**3.4.**–

- Le signal reste sinusoïdal si :  $\left|\frac{dv_s}{dt}\right|_{\max} = V_s\omega \leq \sigma \Rightarrow \omega \leq \frac{\sigma}{V_s} = \omega_1$
- Application numérique :  $f_1 = 10,6 \text{ kHz}$

Si vous avez des réponses plus élégantes, n'hésitez pas de nous les communiquer aux adresses suivantes :  
***lhaghazzaf@yahoo.fr***, ***cpgemaroc@yahoo.fr*** et ***habib\_af@yahoo.fr***